第28卷 第2期 工 程 数 学 学 报 Vol. 28 No. 2
2011年04月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Apr. 2011

文章编号:1005-3085(2011)02-0157-08

SAR图像配准的二元Rayleigh分布互信息方法*

肖 星[1]， 田 铮[1,2]， 冷成财[1]

(1- 西北工业大学应用数学系，西安 710072;
2- 中国科学院遥感应用研究所国家重点实验室，北京 100101)

摘 要: 合成孔径雷达(Synthetic Aperture Radar，简称SAR)图像中乘性斑点噪声的存在，使得传统的互信息配准方法中的插值假象更为严重．本文把单视SAR幅值图像同质区域服从Rayleigh分布这一先验信息引入互信息配准方法中，对同源单视SAR幅值图像进行配准．以合成图像和真实图像的试验结果和分析证实了方法的可行性，说明新方法优于传统直方图估计联合分布的互信息方法．

关键词: 单视幅值；SAR；图像配准；二元Rayleigh分布；互信息

分类号: AMS(2000) 94A08 **中图分类号**: TP391 **文献标识码**: A

1 引言

基于互信息的配准方法具有全自动、精度高、无需提取图像特征等优点，在医学图像配准[1]和遥感图像配准[2-4]中得到了广泛的应用．但对于SAR图像，由于其成像机理决定的乘性斑点噪声的存在，使得互信息配准方法中的插值假象问题更为突出，从而限制了该方法在SAR图像配准中的应用．文献[5,6]都是先对SAR图像进行滤波预处理，再利用互信息实现了SAR图像的配准．

传统的互信息配准方法不考虑图像的任何先验信息，只用统计直方图估计联合分布来计算互信息．而文献[7]中利用了SAR能量图像服从而Gamma分布这一先验信息，根据单幅图像的分布类型在两幅图像之间建立二元Gamma分布模型，然后利用图像数据估计模型参数进而计算互信息，较传统的互信息方法更准确．但SAR图像常以幅值的形式给出，文献[8-10]说明了单视SAR幅值图像的同质区域服从Rayleigh分布．

本文在上述文献的基础上对两幅单视SAR幅值图像建立二元Rayleigh分布模型；由二元Rayleigh分布的密度函数得到了二元Rayleigh分布的互信息的形式和计算方法；给出了两幅单视SAR幅值图像配准的二元Rayleigh互信息配准算法．利用该算法对合成图像和真实SAR图像进行试验，并与传统的互信息方法作了比较和分析，结果表明该方法可用于同源单视SAR幅值图像的配准，较传统互信息方法更有效．

2 二元Rayleigh分布及其互信息

本节介绍二元Rayleigh分布及其互信息，2.1节给出了二元Rayleigh分布及其参数估计，2.2节给出了二元Rayleigh分布互信息的推导过程，2.3节给出了二元Rayleigh分布的模拟数据产生方法．

收稿日期: 2008-10-28. **作者简介**: 肖星(1983年10月生)，男，硕士．研究方向：信息处理与计算机视觉．
***基金项目**: 国家自然科学基金(60972150; 10926197)；航空科学基金(20081913006).

2.1 二元 Rayleigh 分布及其参数估计

二元 Rayleigh 分布 (Bivariate Rayleigh Distribution, BRD) 是 Nakagami-m 分布在 $m=1$ 时的特殊情形[11]，密度函数为

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\frac{4x_1x_2}{a_1a_2(1-\rho)}\exp\Big(-\frac{1}{1-\rho}\Big(\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}\Big)\Big)I_0\Big(\frac{2\sqrt{\rho}x_1x_2}{(1-\rho)\sqrt{a_1a_2}}\Big), \tag{1}$$

其中

$$x_1>0,\quad x_2>0,\quad a_1=\mathrm{E}(X_1^2),\quad a_2=\mathrm{E}(X_2^2),$$

$$\rho=\frac{\mathrm{Cov}(X_1^2,X_2^2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1^2)}\sqrt{\mathrm{Var}(X_2^2)}},\quad I_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(k+1)}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2k}$$

是零阶第一类变形 Bessel 函数.

二元 Rayleigh 分布的边缘分布为

$$f_{X_i}(x)=\frac{2x}{a_i}\exp\Big(-\frac{x^2}{a_i}\Big),\quad x>0,\quad i=1,2, \tag{2}$$

这正是一元 Rayleigh 分布的密度函数，也是 (1) 式之所以为二元 Rayleigh 分布的原因之一，也是可以用它对同源的两幅 SAR 幅值图像进行建模的基础.

二元 Rayleigh 分布的各阶矩为

$$\mathrm{E}(X^mY^n)=(1-\rho)^{1+\frac{m+n}{2}}a_1^{\frac{m}{2}}a_2^{\frac{n}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\Gamma\Big(k+1+\frac{m}{2}\Big)\Gamma\Big(k+1+\frac{n}{2}\Big)\rho^k, \tag{3}$$

其中 m,n 为非负整数. 从而得到期望和方差

$$\mathrm{E}(X_i)=\frac{\sqrt{\pi a_i}}{2},\quad \mathrm{Var}(X_i)=\frac{4-\pi}{4}a_i,\quad i=1,2,$$

以及 (1) 式中各参数的意义.

给定样本 $(x_1^1,x_2^1),(x_1^2,x_2^2),\cdots,(x_1^n,x_2^n)$ 后，可用矩估计来估计各参数

$$\hat{a}_i=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_i^k)^2,\quad i=1,2,\quad \hat{\rho}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\big((x_1^k)^2-\hat{a_1}\big)\big((x_2^k)^2-\hat{a_2}\big)}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\big((x_1^k)^2-\hat{a_1}\big)}\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\big((x_2^k)^2-\hat{a_2}\big)}}.$$

2.2 二元 Rayleigh 分布的互信息

用密度函数表示的互信息的形式为

$$\mathrm{MI}(A,B)=\int\int_{\Pi}f_{(A,B)}(x,y)\ln\frac{f_{(A,B)}(x,y)}{f_A(x)f_B(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{4}$$

其中 $f_{(A,B)}(x,y)$ 为随机变量 A 和 B 联合密度函数函数，Π 为联合密度函数函数的支撑集，$f_A(x)$ 和 $f_B(x)$ 分别为 A 和 B 的边缘分布. 由 (4) 互信息还可以表示为

$$\mathrm{MI}(A,B)=\mathrm{E}\Big(\ln\frac{f_{(A,B)}(A,B)}{f_A(A)f_B(B)}\Big), \tag{5}$$

其中 E(·) 是对联合分布 $f_{(A,B)}(x,y)$ 取期望.

先说明几个记号，由 (1) 确定的二元 Rayleigh 分布可由三个参数 a_1, a_2 和 ρ 来确定，因此记之为 $\mathrm{BRD}(a_1,a_2,\rho)$，对应的互信息记为 $\mathrm{MI}(a_1,a_2,\rho)$. 由于

$$\ln\frac{f_{(X_1,X_2)}(X_1,X_2)}{f_{X_1}(X_1)f_{X_2}(X_2)}=\ln\Big(\frac{1}{1-\rho}\Big)+\log\Big(I_0\Big(\frac{2\sqrt{\rho}X_1X_2}{(1-\rho)\sqrt{a_1a_2}}\Big)\Big)-\frac{\rho}{1-\rho}\Big(\frac{X_1^2}{a_1}+\frac{X_2^2}{a_2}\Big),$$

于是由 (5) 式可得

$$\begin{aligned}\mathrm{MI}(a_1,a_2,\rho) &= \mathrm{E}\Big(\ln\frac{f_{(X_1,X_2)}(X_1,X_2)}{f_{X_1}(X_1)f_{X_2}(X_2)}\Big)\\ &= \ln\Big(\frac{1}{1-\rho}\Big)-\frac{2\rho}{1-\rho}+\mathrm{E}\Big(\ln\Big(I_0\Big(\frac{2\sqrt{\rho}X_1X_2}{(1-\rho)\sqrt{a_1a_2}}\Big)\Big)\Big),\end{aligned}$$

其中 E(·) 是对联合分布 $\mathrm{BRD}(a_1,a_2,\rho)$ 取期望，记

$$A=\mathrm{E}\Big(\ln\Big(I_0\Big(\frac{2\sqrt{\rho}X_1X_2}{(1-\rho)\sqrt{a_1a_2}}\Big)\Big)\Big),$$

这个积分不能给出显示表示，但是进一步有

$$\begin{aligned}A &= \mathrm{E}\Big(\ln\Big(I_0\Big(\frac{2\sqrt{\rho}X_1X_2}{(1-\rho)\sqrt{a_1a_2}}\Big)\Big)\Big)\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty\frac{4x_1x_2}{(1-\rho)}\exp\Big\{-\frac{1}{1-\rho}(x_1^2+x_2^2)\Big\}I_0\Big(\frac{2\sqrt{\rho}x_1x_2}{(1-\rho)}\Big)\cdot\ln\Big(I_0\Big(\frac{2\sqrt{\rho}x_1x_2}{(1-\rho)}\Big)\Big)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\ &= \tilde{\mathrm{E}}\Big(\ln\Big(I_0\Big(\frac{2\sqrt{\rho}X_1X_2}{1-\rho}\Big)\Big)\Big),\end{aligned}$$

其中 $\tilde{\mathrm{E}}(\cdot)$ 是对 $\mathrm{BRD}(1,1,\rho)$ 取期望. 最后得到的积分还是不能得到显示的表达式，但它已经是参数 ρ 的函数，即只与一个参数有关，从而 $\mathrm{MI}(a_1,a_2,\rho)$ 可记为 $\mathrm{MI}(\rho)$. 在实际应用中给定参数 ρ，用数值方法给出数值结果. 通过数值计算，可以得到 $\mathrm{MI}(\rho)$ 和 ρ 的关系如图 1 所示.

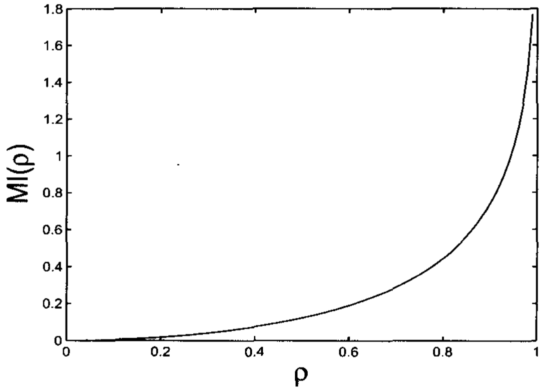

图 1:　二元 Rayleigh 分布的互信息 $\mathrm{MI}(\rho)$ 和其参数 ρ 的关系

2.3 二元 Rayleigh 分布的模拟数据产生方法

为了分析二元 Rayleigh 分布的互信息在图像配准中的可行性，首先作合成图像的配准试验，从而要产生服从二元 Rayleigh 分布的模拟数据．由 (1) 可得的边缘分布的分布函数为

$$F_{X_1}(x_1) = 1 - \exp\Big(-\frac{x_1^2}{a_1}\Big)x_1 > 0, \tag{6}$$

令 $F_{X_1}(x_1) = u_1$，若 u_1 为 $[0,1]$ 上的均匀分布，则

$$\hat{x}_1 = \sqrt{-a_1 \ln(1-u_1)}$$

为服从 (6) 式的采样值．同样由 (1) 可以得到条件分布

$$f_{X_2|X_1}\big(x_2 \,|\, X_1 = \hat{x}_1\big) = \frac{2x_2}{a_1a_2(1-\rho)}\exp\Big(-\frac{\rho a_2\hat{x}_1^2 + a_1x_2^2}{a_1a_2(1-\rho)}\Big)I_0\Big(\frac{2\sqrt{\rho}\hat{x}_1x_2}{\sqrt{a_1a_2}(1-\rho)}\Big), \quad x_2 > 0,$$

从而

$$F_{X_2|X_1}\big(x_2 \,|\, X_1 = \hat{x}_1\big) = 1 - Q\Big(\hat{x}_1\sqrt{\frac{2\rho}{(1-\rho)a_1}}, x_2\sqrt{\frac{2}{(1-\rho)a_2}}\Big), \quad x_2 > 0,$$

其中 $Q(a,b)$ 为 Marcum-Q 函数，定义为

$$Q(a,b) = \int_0^\infty x\exp\Big(-\frac{x^2+a^2}{2}\Big)I_0(ax)\mathrm{d}x.$$

令 $F_{X_2|X_1}(x_2|X_1 = \hat{x}_1) = u_2$，若 u_2 为 $[0,1]$ 上的均匀分布，则解该方程得的 $\hat{x}_2$ 为服从的分布[12]．于是产生二元 Rayleigh 分布的步骤如下：

1) 产生

$$\hat{x}_1 = \sqrt{-a_1\ln(1-u_1)}, \quad 或 \quad \hat{x}_1 = \sqrt{-a_1\ln u_1},$$

其中 u_1 为 $[0,1]$ 均匀分布的采样值；

2) 计算 $\hat{x}_2$ 从方程 $Q(a,t) = 1-u_2$ 或 $Q(a,t) = u_2$，其中 u_2 为 $[0,1]$ 均匀分布的采样值，且

$$a = \hat{x}_1\sqrt{\frac{2\rho}{a_1(1-u_2)}}, \quad t = x_2\sqrt{\frac{2}{a_2(1-u_2)}}$$

解得的 $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ 就是来自 $\mathrm{BRD}(a_1, a_2, \rho)$ 的一个模拟数据．

3 SAR 图像配准的二元 Rayleigh 分布的互信息方法步骤

给定待配准的两幅 SAR 图像，建立二元 Rayleigh 分布模型如下：给定一个变换，把参考图像与由待配准图像得到的变换图像的重合部分的每一对像素看成一个来自二元 Rayleigh 分布的样本．对于同质区域的所有像素对可以看作来自同一个二元 Rayleigh 分布的样本，因此可以用这些样本来估计分布参数进而计算其互信息．

在配准之前，如果不知道图像的视数或不清楚是幅值图像还是能量图像，就不能保证它们服从的分布类型是 Rayleigh 分布；在配准的过程中，所选定的区域如果不是同质区域，即使分布类型是 Rayleigh 分布，但参数不同，估计参数和计算互信息时也是有问题的．因此在用该方法配准之前，先用 Kolmogrov 检验选定区域．

Kolmogrov 检验不仅需要知道分布的类型，还需要知道分布的参数．因此先用 Rayleigh 分布的矩估计方法估计出参数，再用 Kolmogrov 检验方法检验样本是否为来自该参数的 Rayleigh 分布．

通过 Kolmogrov 检验满足分布要求的区域给予保留，不满足则舍弃，重新选取区域进行检验，要是选取多次都被拒绝，可能是选取的区域非同质，也可能图像本身就不符合要求．对于前一种情况可以继续重新选取区域或人工选取或先粗略分割图像，若是后一种情况停止用该方法配准．

单视 SAR 幅值图像的二元 Rayleigh分布互信息配准方法步骤如下：

1)　记参考图像和待配准图像为 I_{ref} 和 I_{sen}，首先给定一个初始变换 T_0，为了使配准过程较快和优化时不陷入局部极大值，最好给定的初始变换能粗略配准图像，例如可用人工选取控制点的配准方法确定初始变换，I_{sen} 变换后得到的图像记为 $I_{\mathrm{trmf}}(T_0)$；

2)　用 Kolmogrov 检验在 I_{ref} 和 $I_{\mathrm{trmf}}(T_0)$ 的重合部分选取用于估计参数和计算互信息的区域，选取区域可以随机选取也可以人工选取，为了较快选定满足要求的区域，人工选取同质区域较好，也可用分割的方法选取，当然这里对分割的要求不高只需把同质区域分割出来即可，所选区域可是一个也可为多个；

3)　用 Powell 的方向集优化算法由初始变换 T_0 最大化互信息得到最优变换 T_{opt}，其中计算互信息的过程如下，在 I_{ref} 中保留由 2) 步选定的区域，对于每给定一个变换 T 和得到的变换图像 $I_{\mathrm{trmf}}(T)$，用 I_{ref} 中所选定的区域和 $I_{\mathrm{trmf}}(T)$ 中的重合部分估计二元 Rayleigh 分布的参数，进而计算互信息 $\mathrm{MI}(T)$，需要注意的是如果选定的区域为多个，这多个区域并不一定是来自同一个二元 Rayleigh 分布的样本，因此对每一个区域都计算一个互信息值，最后的 $\mathrm{MI}(T)$ 为各区域互信息值之和．

得到最优变换 T_{opt}，便完成了两幅图像的配准．本文用的是仿射变换，根据不同图像的要求，也可选其它的变换．值得注意的是在变换过程中所用的插值方法也很重要，本文选用双线性插值．

4　试验结果与分析

我们分别用合成图像和真实 SAR 图像做了配准试验，并对结果进行了比较和分析．

4.1　合成图像实试验分析

图 2 是一组服从二元 Rayleigh 分布的合成图像，左边两幅图像大小完全相同，区域边界划分完全一致，同一位置的两个像素值是一个来自二元 Rayleigh 分布的模拟数据．两幅图像各有四个不同的同质区域，四个区域参数分别是$(25,27,0.9)$, $(45,50,0.8)$, $(56,62,0.9)$ 和 $(70,71,0.9)$．右边两幅图像是从左边两幅图像中截取的部分图像，但是截取的区域不同，从而这两幅图像有重叠部分但又不完全相同，可用于图像配准试验分析，需要的变换只是平移．

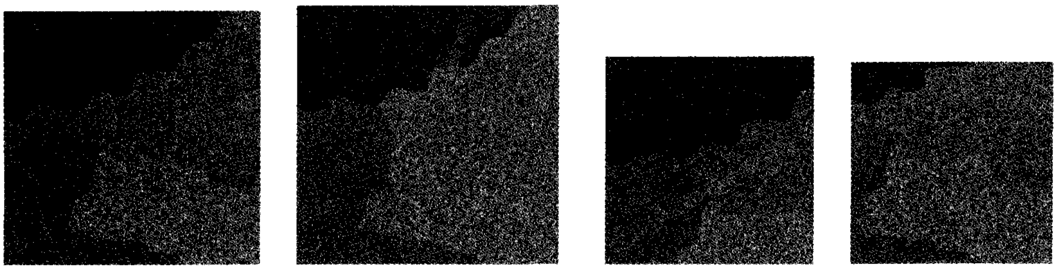

图 2:　两幅服从二元 Rayleigh 分布的合成图像

把图2第三幅图像作为参考图像，第四幅图像作为待配准图像，准确配准结果为待配准图像向左和向下各平移56个像素，如图3左图所示．图3中图和右图分别为直方图估计的互信息和基于二元Rayleigh分布的互信息两个测度在最优配准结果两个平移方向附近的值．从这两个图中可以明显看出直方图估计的互信息振荡很大，不能用于图2所示的两幅图像的配准，而基于Rayleigh分布的互信息测度可以衡量配准的精确程度．

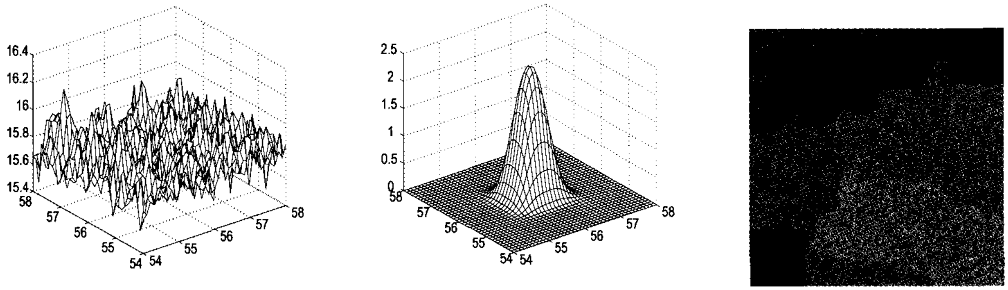

图3: 最优配准拼接结果和最优配准附近的两种互信息值

4.2 SAR图像试验

图4为两幅同一区域不同时刻的SAR图像，图像大小均为512 × 512．试验中确定左图为参考图像，右为待配准图像，选用仿射变换．

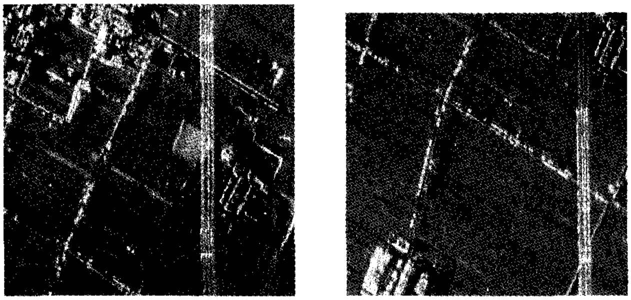

图4: 同一区域不同时刻的两幅SAR图像

图5为图4的配准拼接结果．左图为人工选取4个控制点得到的配准结果，中图和右图分别是用传统的直方图估计的互信息方法和基于二元Rayleigh分布的互信息方法由初始变换出发得到的配准结果．配准结果的显示方式是对于重叠区域各显示参考图像和变换图像的50%，对空白区域即参考图像和变换图像都不能覆盖的像素位置显示为黑色．从图5中可以看出，左中有许多明显的线条都没有对齐，中图的结果较左图要好，但是有些线条和亮点都显得非常模糊即配准结果不够精确，但基于二元Rayleigh分布的互信息方法配准结果右图中重合部分线条清晰，参考图像和配准图像中的强散射亮点也对齐的很好，总体效果令人满意．

图6为两幅同一区域不同尺度的SAR图像，这两幅图像尺度相差较大，左图大小为300 × 300，右图为150 × 150．以左图为参考图像，右图为待配准图像，仍选用仿射变换．图7为配准结果，配准结果的显示方式同图5，从中可以看出，左图中细长的特征由于没有对齐显示成了两条，重合部分到非重合部分的过渡非常不自然，中图是由左图互信息优化得到的，虽然把左图中的一些没有对齐的特征对齐了，但又多了一些其它特征没有对齐，右图结果则明显优于左图和中图．

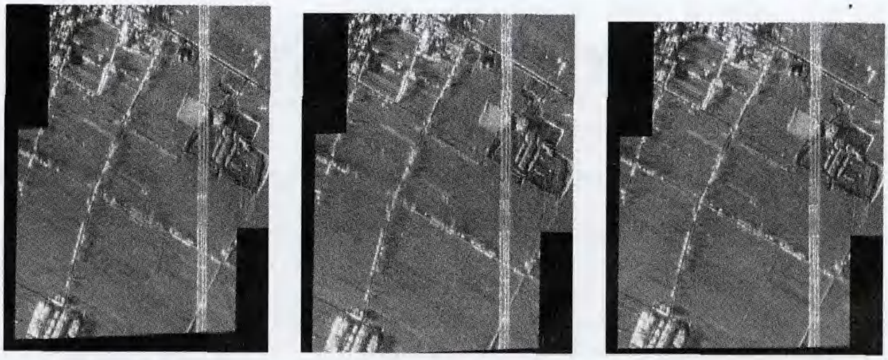

图 5: 图 4 配准拼接结果

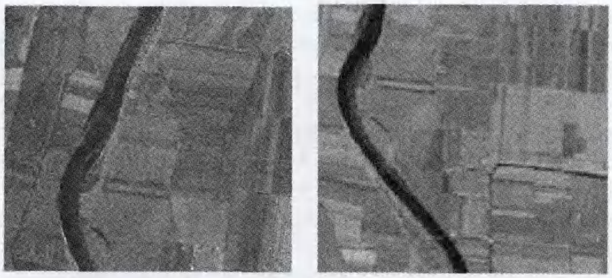

图 6: 同一区域不同尺度的两幅SAR图像

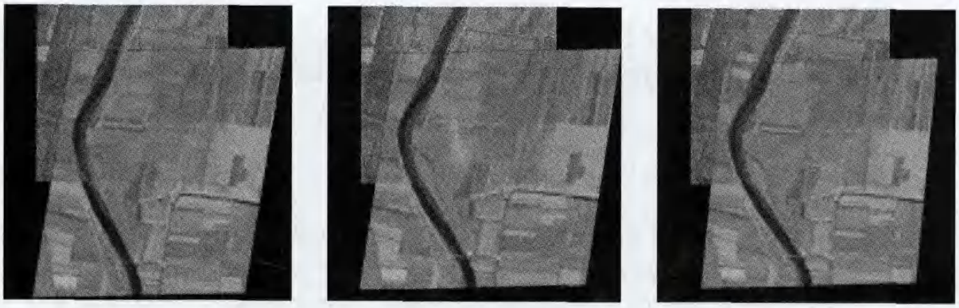

图 7: 图 6 配准拼接结果

5 结论

本文由二元 Rayleigh 分布的密度函数推导了二元 Rayleigh 分布的互信息，对服从 Rayleigh 分布模型的待配准的两幅同源单视SAR幅值图像建立了二元Rayleigh分布模型，并提出了这样两幅图像的二元Rayleigh分布的互信息的配准方法．合成图像和真实图像的试验结果证实了方法的可行性，并较传统的互信息方法有效．

文中对二元Rayleigh分布的参数估计采用较为简单的矩估计，这个估计方法可能不够准确从而会影响配准结果；另外，二元Rayleigh分布的互信息的最后形式虽然只和一个参数有关，

但是不能显示表达，数值计算比较耗时从而影响配准速度．寻找二元 Rayleigh 分布参数更优的估计和二元 Rayleigh 分布互信息的近似显示表达式为后续研究工作．

参考文献：

[1] Pluim J P W, Maintz J B A, Viergever M A. Mutual-information-based registration of medical images: a survey[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2003, 22(8): 986-1004

[2] Chen H M, Varshney P K, Arora M K. Performance of mutual information similarity measure for registration of multitemporal remote sensing images[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2003, 41(11): 2445-2454

[3] Chen H M, Arora M K, Varshney P K. Mutual information-based image registration for remote sensing data[J]. International Journal of Remote Sensing, 2003, 24(18): 3701-3706

[4] Chen H M, Varshney P K. Size-dependent image resampling for mutual information based remote sensing image registration[J]. IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2004, 4: 2405-2408

[5] Xie H, Pierce L E, Ulaby F T. Mutual information based registration of SAR images[J]. IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2003, 6: 4028-4031

[6] Shu L X, Tan T N. SAR and SPOT image registration based on mutual information with contrast measure[J]. IEEE International Conference on Image Processing, 2007, 5: 429-432

[7] Chatelain F, Tourneret J Y, Inglada J, *et al.* Bivariate Gamma distributions for image registration and change detection[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(7): 1796-1806

[8] Skolnik M I. Introduction to Radar Systems[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2007

[9] Oliver C, Quegan S. Understanding Synthetic Aperture Radar Images[M]. Boston: Artech House, 1998

[10] Chitroub S, Houacine A, Sansal B. Statistical characterisation and modelling of SAR images[J]. Signal Processing, 2002, 82: 69-92

[11] Tan C C, Beaulieu N C. Infinite series representations of the bivariate Rayleigh and Nakagami-m distributions[J]. IEEE Transactions on Communications, 1997, 45(10): 1159-1161

[12] Tellambura C, Jayalath D. Generation of bivariate Rayleigh and Nakagami-m fading envelopes[J]. IEEE Communications Letters, 2000, 4(5): 170-172

Bivariate Rayleigh Distribution and its Mutual Information for SAR Image Registration

XIAO Xing[1], TIAN Zheng[1,2], LENG Cheng-cai[1]

(1- Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072;
2- State Key Laboratory of Remote Sensing Science, Institute of Remote Sensing Applications, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100101)

Abstract: Due to the speckle noise of Synthetic Aperture Radar (SAR) image which is determined by the SAR imaging mechanism, the interpolation artifacts of mutual information based on image registration become important. This paper combines the prior information that the homogenous regions of the single-look SAR amplitude image follow the Rayleigh distribution with the mutual information, and registers two single-look SAR amplitude images by the bivariate Rayleigh distribution and its mutual information. The experiments of synthetic images and real SAR images show the efficacy and advantage of this method when compared with the traditional mutual information method.

Keywords: single-look amplitude; SAR; image registration; bivariate Rayleigh distribution; mutual information

Received: 28 Oct 2008. **Accepted:** 26 Sep 2009.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (60972150; 10926197); the National Aerospace Science Foundation of China (20081913006).